**ЗАНЯТИЕ 12. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ**

**УРАВНЕНИЙ**

*Теория*: Лекция №10

*Примеры*: см. Филиппов А.Ф.

1. **Решение линейных систем дифференциальных уравнений методами**

**линейной алгебры**

1. Для решения ***линейной однородной системы*** (ЛОС)  нужно найти собственные значения  и собственные векторы  матрицы системы . Тогда решения этой системы будут вида .

Все последующие примеры с номерами из сборника Филиппова (решения принадлежат А.А. Макарову).

**Пример 1 (№786)** 

Составим характеристическое уравнение .

Раскрывая определитель, получим .

**Его корни**  и  являются ***собственными значениями*** нашей матрицы *А*.

Найдем ***собственные векторы*** .

Подставим . Получим систему . Следовательно, .

Возьмем . Получим собственный вектор .

Аналогично для  получим систему .

Следовательно,  и собственный вектор .

Значит ***общее решение системы*** будет иметь вид:

 или в координатном виде .

**Пример 2 (№790)** .

Характеристическое уравнение . **Его корни** .

Найдем собственный вектор для корня  из системы , откуда получаем . Значит, собственный вектор .

Запишем комплексное решение нашей системы .

- 2 –

Тогда **действительная** и **мнимая части** этого решения будут решениями нашей системы.

Получим , .

Значит ***общее решение системы*** будет таким: .

**Пример 3 (№792)** .

Характеристическое уравнение .

У него **кратный корень** . ***Собственный вектор*** .

Второе решение ищем в виде , где  - постоянный вектор.

Или ***в координатном виде*** .

Подставляя в нашу систему, получим .

Откуда получаем .

Можно взять любое , например . Тогда .

Получили такое второе решение .

***Общее решение*** .

2. Если решаем ***линейную неоднородную систему*** (ЛНС) вида  с , где  - полиномиальный вектор степени , то ***частное решение*** этой системы ищем в виде

,

где  - полиномиальный вектор степени  (здесь - кратность  как корня характеристического уравнения).

**Пример 4** .

Так как решение соответствующей линейной однородной системы мы нашли ранее при решении Примера 1, остается найти частное решение.

Ищем его в виде .

Подставив в нашу систему, получаем .

Отсюда .

***Общее решение***  .

**Пример ** .

По сравнению с Примером 4 мы изменили только функцию  и теперь совпадает с корнем характеристического уравнения кратности .

Поэтому частное решение ищем в виде .

Подставляем в систему .

Получаем .

Приравнивая коэффициенты при равных степенях , получаем систему



Отсюда , .

 - произвольное, например, .

.

***Общее решение:*** .

**Пример 5 (№846)** .

Сначала решаем ЛОС

 

, . Собственный вектор .

Комплексное решение .

Берем действительную и мнимую части этого решения и получаем

.

***Общее решение однородной системы*** 

Решение ЛНС ищем методом вариации постоянных, то есть в виде

.

 и  удовлетворяют системе (см. Лекцию 10)

.

Решая эту систему, находим .

Значит,

,

где  и  - произвольные константы.

***Общее решение*** .

2. **Решение систем линейных дифференциальных уравнений методами**

**операционного исчисления (при помощи преобразования Лапласа)**

Вспомним материал предыдущего занятия № 11. Если применить преобразование Лапласа  и  к каждому из уравнения системы, то получим изображения производных:   где  и  - изображения функций  и ,  и  - начальные условия задачи Коши. Поскольку мы ищем общее решение системы, то будем полагать начальные условия, равными некоторым произвольным постоянным:  и . Мы используем маленькие (строчные) буквы *с*, чтобы не путать начальные условия с постоянными интегрирования *С* в предыдущих примерах. Конечно, они связаны между собой линейными соотношениями. Итак, , . Дельнейший ход решения ЛОС и ЛНС с постоянными коэффициентами  следующий:

1. Применяем преобразование Лапласа к обоим уравнениям:

 где  и  - изображения функций  и  соответственно. Мы пришли к системе 2-х линейных уравнений относительно функций  и .

1. Находим решения этой системы и .
2. Выполняя обратные преобразование Лапласа  и , находим решение задачи.

Проиллюстрируем данный метод на предыдущих примерах, общие решения которых нам известны.

**Пример 1 (№786)** найти общее решение ЛОС 

***Решение***. 1. Применяем преобразование Лапласа к обоим уравнениям:

 Перепишем систему в более удобном виде: 

2. Решаем ее по правилу Крамера. Главный определитель системы равен . Решение для *Х* имеет следующий вид:  Аналогично для *Y*; .

3. Выполняем обратные преобразования Лапласа:  . Легко проверить, что начальные условия  и  выполняются. Если ввести обозначения  и , то получим решение в координатном виде: , которое совпадают с полученным А.А. Макаровым выше.

**Пример 2 (№790)** найти общее решение ЛОС 

***Решение***. 1. Применяем преобразование Лапласа к обоим уравнениям:

 Перепишем систему в более удобном виде: 

2. Решаем ее по правилу Крамера. Главный определитель системы равен . Решение для *Х* имеет следующий вид:   Аналогично для *Y*; 

3. Выполняем обратные преобразования Лапласа: .  Легко проверить, что начальные условия  и  выполняются. Ввиду того, что константы произвольны, наше решение совпадает с решением в координатном виде: , полученным А.А. Макаровым выше.

**Пример 3 (№792)** найти общее решение ЛОС 

***Решение***. 1. Применяем преобразование Лапласа к обоим уравнениям:

 Перепишем систему в более удобном виде: 

2. Решаем ее по правилу Крамера. Главный определитель системы равен . Решение для *Х* имеет следующий вид:  Аналогично для *Y*:  

3. Выполняем обратные преобразования Лапласа: .  Легко проверить, что начальные условия  и  выполняются. Если ввести обозначения  и , то получим решение в координатном виде: , которое совпадает с полученным А.А. Макаровым выше.

**Пример 4** найти общее решение ЛНС 

***Решение***. 1. Применяем преобразование Лапласа к обоим уравнениям:

 Перепишем систему в более удобном виде: 

2. Решаем ее по правилу Крамера. Главный определитель системы равен . Решение для *Х* имеет следующий вид:   Аналогично для *Y*: 

3. Выполняем обратные преобразования Лапласа: . Аналогично для : . Легко проверить, что начальные условия  и  выполняются. Если ввести обозначения  и , то получим решение системы в координатном виде: , которое совпадает с полученным А.А. Макаровым выше.

**Пример ** найти общее решение ЛНС .

***Решение***. 1. Применяем преобразование Лапласа к обоим уравнениям:

 Перепишем систему в более удобном виде: 

2. Решаем ее по правилу Крамера. Главный определитель системы равен . Решение для *Х* имеет следующий вид:  . Аналогично для *Y*:



3. Выполняем обратные преобразования Лапласа: . Аналогично для : . Легко проверить, что начальные условия  и  выполняются. Если ввести обозначения  и , то получим решение системы в координатном виде: , которое совпадает с полученным А.А. Макаровым выше.

**Пример 5 (№846)** найти общее решение ЛНС .

***Решение***. Решение этой задачи осложняется тем фактом, что для правой части уравнений системы  и  нет точных формул для преобразования Лапласа даже в самых полных таблицах. Поэтому воспользуемся следующим искусственным приемом: предположим, что такие преобразования существуют, т.е. , . Явный вид функций  и  нас не интересует, т.к. при нахождении решения системы мы будем делать обратные преобразования: , . Далее действуем по схеме:

1. Применяем преобразование Лапласа к обоим уравнениям:

 Перепишем систему в более удобном виде:  Для краткости будем писать вместо  и  *F* и *G*.

2. Решаем систему по правилу Крамера. Главный определитель системы равен . Решение для *Х* имеет следующий вид: Аналогично для *Y*: 



3. Выполняем обратные преобразования Лапласа. При этом помимо таблицы преобразований воспользуемся теоремой о свертке изображений функций (см. п. 8 на с.11 Занятия № 11):  где *h*(*t*) – оригинал функции *Н*(*р*). Имеем: 

  .

Аналогично для *y*(*t*): 

  . Если сделать замены  и , то получим решение системы в координатном виде, которое совпадает с полученным А.А. Макаровым выше.

**Домашнее задание:**

Решить следующие номера из сборника Филиппова: 787, 789, 826, 827, 830, 848

каждым из двух приведенных выше способов

**На контрольной последняя 4-я задача будет на линейную неоднородную систему (ЛНС), решить которую можно любым из этих способов (можно в ответе использовать как малые *с*1,2, так и большие *С*1,2 постоянные).**